Meilleure approximation affine, D. Hoareau, domeh@wanadoo.fr

Résumé

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $a \in I$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable en a. On donne du sens à l´affirmation selon laquelle l´application $x \longmapsto f(a) + f'(a)(x-a)$ est la meilleure approche affine de f au voisinage de a.

Une première tentative

Y-a-t-il un voisinage V de a tel que, pour toute fonction affine g envoyant a sur $f(a)$ et pour tout x dans V, l´erreur d´approximation de $f(x)$ (commise en x) avec l´application tangente en a est inférieure à l´erreur due à g ?

Si un tel voisinage V existe, on choisit x_0 dans V tel que $f(x_0) \neq f(a) + f'(a)(x_0 - a)$ (possible si on suppose f non affine autour de a), et on envisage l´application affine g définie par $g(a) = f(a)$ et $g(x_0) = f(x_0)$. On a alors $\mid (f(a) + f'(a)(x_0 - a)) - f(x_0) \mid > \mid g(x_0) - f(x_0) \mid = 0$, ce qui contredit la définition de V.

Les quantificateurs à leur place

Soit m un réel distinct de $f'(a)$ et g la fonction affine de coefficient directeur m qui envoie a sur $f(a)$. Lorsque h tend vers 0, $\mid \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} - m \mid$ tend vers $\mid f'(a) - m \mid > 0$. On choisit alors $\tilde{\eta} > 0$ (qui dépend de g) tel que :

$$\mid h \mid < \tilde{\eta} \Longrightarrow \mid \frac{f(a+h) - f(a)}{h} - m \mid > \underbrace{\frac{\mid f'(a) - m \mid}{2}}_{noté\ \varepsilon}.$$

Dans les circonstances dites : $\mid f(a+h) - f(a) - mh \mid > \varepsilon h$. Avec ce même ε, on choisit à présent $\eta < \tilde{\eta}$ (qui dépend aussi de g) tel que, pour $\mid h \mid < \eta$, $\mid \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} - f'(a) \mid \leqslant \varepsilon$, donc, pour $\mid h \mid < \eta$,

$$\mid f(a+h) - f(a) - f'(a)h \mid \leqslant \varepsilon h,$$

ce qui donne en définitive :

$$\mid f(a+h) - (f(a) + f'(a)h) \mid < \mid f(a+h) - (f(a) + mh) \mid .$$

On a montré qu´après avoir choisi une application affine arbitraire g envoyant a sur $f(a)$, il existe un voisinage de a (qui dépend donc de g) sur lequel l´erreur $\mid f(x) - g(x) \mid$ est plus grande que l´erreur d´approximation de $f(x)$ avec l´application $x \longmapsto f(a) + f'(a)(x-a)$ tangente en a.